

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ- ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. Ο ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2\chi^2 + 7\chi - 15$ είναι το $2\chi - 3$. Να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\chi - 3)^2$

β) $(2\chi + \omega)^2$

γ) $(5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi)$

δ) $(2\psi - 5)^3$

ε) $(-5\chi^3 - 2\psi)^2$

στ) $(\alpha - 3\beta^2 + 2)^2$

3. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$

$$(2\chi + 1)^3 - 2\chi(3\chi + 1) \cdot (3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$$

4. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

5. Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi$$

6. Αν $2\alpha - \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4\alpha^2 + \beta^2$.

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

8. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $4\chi + 4\psi + 8\omega$

β) $3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi$

γ) $9\chi^2 - 16\psi^2$

δ) $\chi^2 - \chi - 30$

ε) $25\chi^2 + 40\chi + 16$

στ) $\psi^3 - 25\psi$

ζ) $-\psi^2 + 8\psi - 15$

9. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\alpha(\alpha-2) - \beta(\beta-2)$

β) $\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$

γ) $(\chi-3\omega)^2 + (\chi-3\omega) - 6$

δ) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi$

ε) $16\chi^4 - 81\psi^4$

στ) $3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$

ζ) $\alpha^2(\alpha-5) + (\alpha-5)(3\alpha-2) - 25 + \alpha^2$

η) $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$

θ) $(\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi-9)^2$

ι) $4(\chi-1) + 9\chi^2(1-\chi)$

10. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$

β) $\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2 + 3\chi - 18} \cdot \frac{4\chi + 24}{\chi\psi}$

β) $\frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6}$

γ) $\frac{2\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{1}{5 - \chi} - \frac{3}{\chi^2 + 5\chi}$

δ) $\frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right)$

12. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

α) $\frac{\frac{\chi - 9\psi}{\psi} - \frac{\chi}{\chi}}{\frac{\chi^2 - 6\chi}{\psi^2} + 9}$

β) $\frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}}$

13. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (a + \beta)\chi + 2a + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και -3.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = \chi^3 + a\chi^2 + \beta\chi - 6$. Αν ισχύει ότι $f(-1) = 0$ $f(2) = 0$ να βρείτε τις τιμές των α και β.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 8\chi = 0$

β) $\chi^2 - 64 = 0$

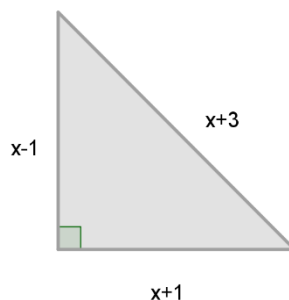
γ) $\chi^2 - 2\chi = 15$

δ) $(\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$

ε) $3\alpha^2 + 4\alpha - 7 = 0$

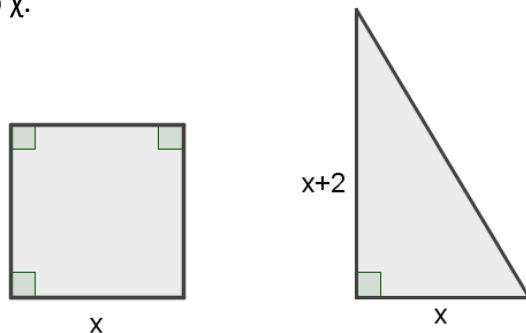
στ) $25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$

2. Να βρείτε τη τιμή του χ στο διπλανό σχήμα.



3. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιο με εμβαδόν 150 τετραγωνικά μέτρα. Αν το μήκος του είναι 5 μέτρα μεγαλύτερο από το πλάτος του να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξη του.

4. Το ορθογώνιο τρίγωνο και το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να υπολογίσετε το χ .



5. Αν $A = (\chi - 3)^2 - (\chi + 3)^2$ και $B = 3\chi^2 - 2\chi$ και ισχύει ότι $\frac{A}{B} = 1$ να βρείτε τη τιμή του χ με $\chi > 0$.

6. Αν η εξίσωση $(\chi - \mu)^2 + 5(\chi - \mu) + 6 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 5, να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού μ αν το μ είναι άρτιος αριθμός.

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\beta) \frac{y+2}{y} = \frac{y+3}{y+4} - \frac{4}{y^2+4y}$$

$$\gamma) \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{25-y^2}$$

$$\delta) \frac{2x}{y^2+y} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

$$\epsilon) \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} = \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega}$$

$$\zeta) \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 4\frac{x+1}{x-1} + 3 = 0$$

$$\eta) \frac{3}{\kappa+2} = \frac{2}{\kappa} + \frac{\kappa-4}{\kappa^2+2\kappa}$$

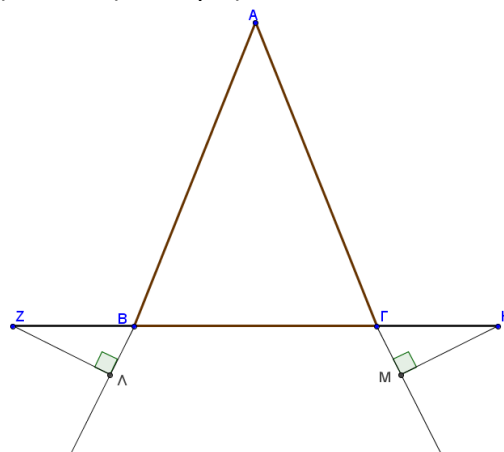
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

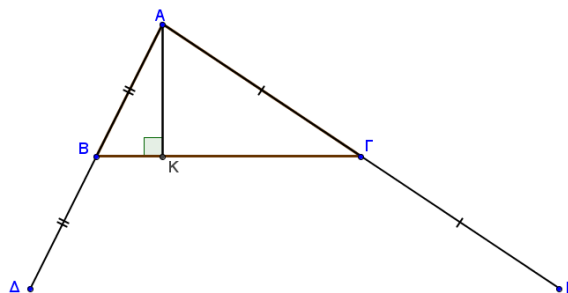
| | | |
|--|----------|----------|
| α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα . | Σ | Λ |
| β) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες. | Σ | Λ |
| γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και έχουν μια γωνία αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα. | Σ | Λ |
| δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα. | Σ | Λ |

2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).Αν Μ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι :
- α) ΒΛ=ΓΜ
β) Τα Μ και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά ΒΓ.
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Αν Κ,Λ,Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΛΚ=ΛΜ.

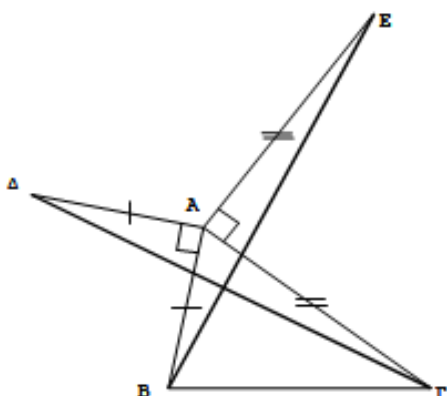
5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $BZ=GH$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $Z\Lambda$ και HM αποστάσεις από τις πλευρές AB και AG αντίστοιχα να δείξετε ότι $Z\Lambda=HM$.



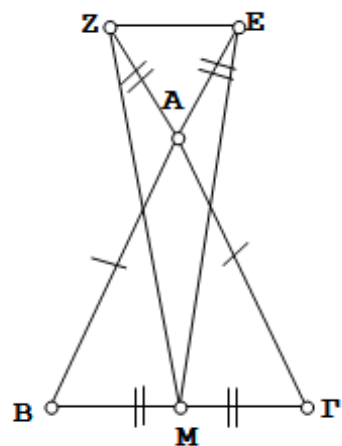
6. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AK . Αν $AB=B\Delta$ και $AG=GE$ να αποδείξετε ότι Δ και E απέχουν ίση απόσταση από την ευθεία $B\Gamma$.



7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο με $A\Delta=AB$, $AE=AG$ και $A\Delta \perp AB$, $AG \perp AE$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta=BE$.

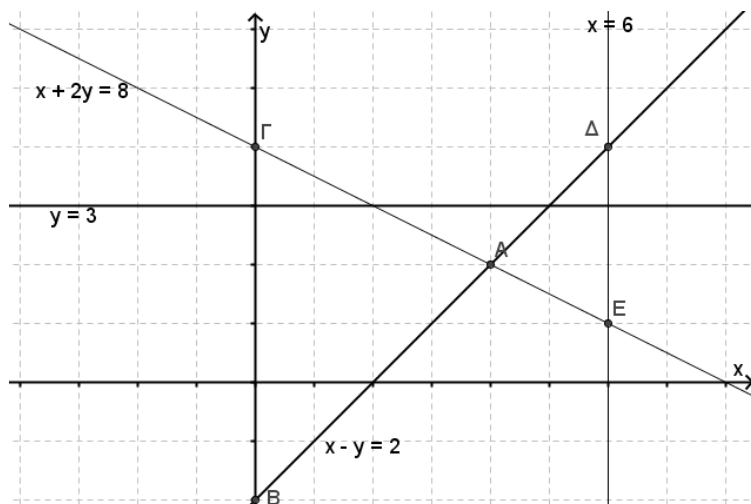


8. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$), M μέσο της $B\Gamma$ και $AZ=AE$.
Να δείξετε το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.



ΕΥΘΕΙΑ- ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΤΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A (2, -3)$ και έχει κλίση $\lambda = 4$.
- Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας :
 - που διέρχεται από τα σημεία $(6, -1)$ και $(3, 2)$
 - που διέρχεται από τα σημεία $(-5, 3)$ και $(2, 3)$
 - που διέρχεται από τα σημεία $(2, 4)$ και $(2, -6)$
 - που περνά από το σημείο $(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - y = 5$
 - που περνά από το σημείο $(-10, 3)$ και κάθετη με την ευθεία $y = 5x - 3$
- Να βρεθεί ο a ώστε οι ευθείες $y = 2x - 5$ και $y = (2a - 7)x + 9$ να είναι :
 - παράλληλες.
 - κάθετες.
- Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



α) Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :

i) $x + 2y = 8$
 $x - y = 2$

ii) $y = 3$
 $x - y = 2$

iii) $x = 6$
 $x + 2y = 8$

iv) $y = 0$
 $x + 2y = 8$

v) $x = 0$
 $x - y = 2$

β) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ.

5. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $x - y = 9$
 $x + y = 13$

β) $3x - y = 12$
 $2x + 3y = 19$

γ) $2\alpha - 3\beta = -6$
 $\alpha - 2\beta = -5$

δ) $3\varphi + 5\omega = 50$
 $4\varphi + 3\omega = 41$

ε) $\frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{8}{3}$
 $x = 2(y + 1)$

στ) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 17$
 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12$

6. Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ ώστε η πιο πάνω ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (a + \beta)x + 2a + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς a και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και -3.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 6$. Αν ισχύει ότι $f(-1) = 0$ $f(2) = 0$ να βρείτε τις τιμές των a και β .

9. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

10. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

11. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 15. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, παίρνουμε αριθμό μικρότερο του αρχικού κατά 27. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό.
12. Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Κάποιος παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 52 βαθμούς ενώ κάποιος άλλος απάντησε σωστά 4 ερωτήσεις και πήρε 4 βαθμούς συνολικά. Πόσους βαθμούς παίρνει για κάθε σωστή απάντηση και πόσους βαθμούς του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;
13. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,4)$, $B(-2,5)$ και $\Gamma(-1,3)$.
- Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 - Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

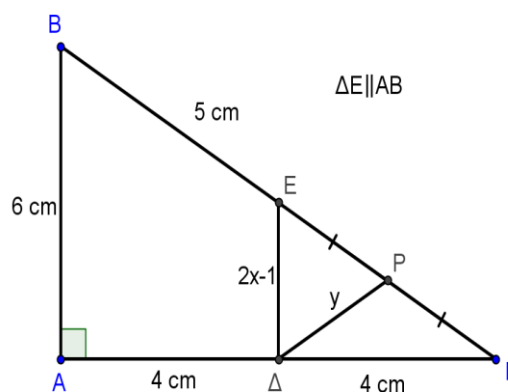
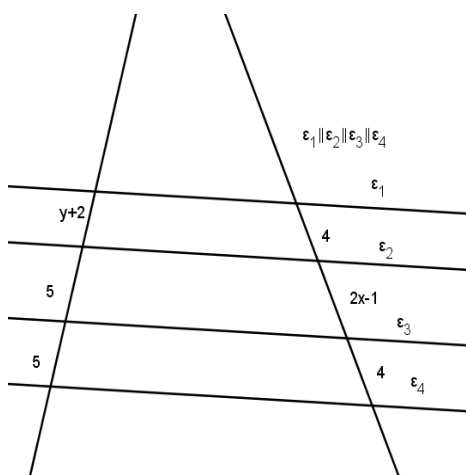
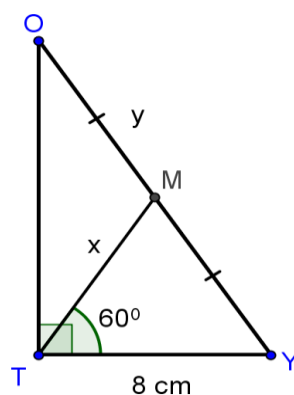
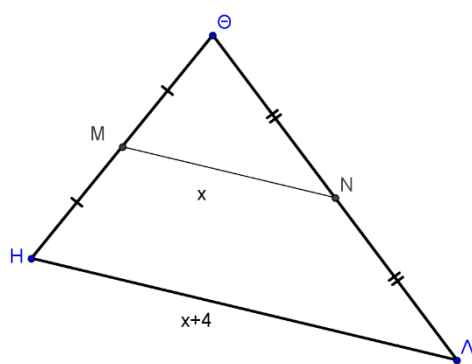
1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

| | | |
|--|----------|-----------|
| α) Ορθογώνιο είναι κάθε παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία . | Σ | Λ |
| β) Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε αυτό είναι ορθογώνιο. | Σ | Λ |
| γ) Ένας παραλληλόγραμμο είναι και ορθογώνιο. | Σ | Λ |

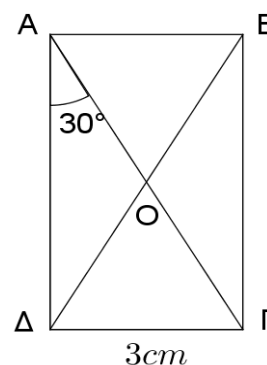
2. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνετε τη $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Delta\Gamma = \Gamma\epsilon$. Να αποδείξετε ότι $AB\epsilon\Gamma$ παραλληλόγραμμο.
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι:
- $BZ\epsilon\Delta$ παραλληλόγραμμο
 - $AE = BZ$
4. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, M είναι το μέσο της $A\Delta$. Φέρουμε την BM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM = ME$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $A\Delta=AB$ και την $A\Gamma$ κατά τμήμα $A\epsilon=A\Gamma$. Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Delta\epsilon$ είναι ορθογώνιο.
6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν τα σημεία Δ, ϵ, Z είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $A\Delta\epsilon Z$ ορθογώνιο.
7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του $A\Delta$.
 - α) Αν ϵ και Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ να δείξετε ότι $A\epsilon\Delta Z$ ορθογώνιο.
 - β) Αν M είναι το μέσο της ϵZ να δείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.
8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα ϵ και Z είναι των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν η ϵZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.

9. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y



10. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν η γωνία $\hat{\Gamma A \Delta} = 30^\circ$ και η πλευρά $\Gamma\Delta$ έχει μήκος 3 cm , να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ (να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας).



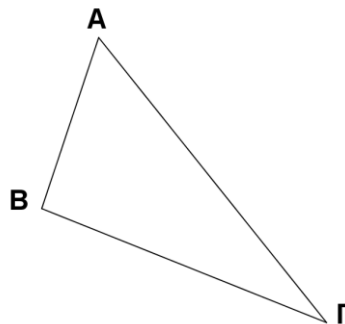
11. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται τρίγωνο ABΓ.

Να φέρετε τη διάμεσο AM και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $MΔ = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα ABM και MΓΔ είναι ίσα.

(β) το τετράπλευρο AΓΔB είναι παραλληλόγραμμο.



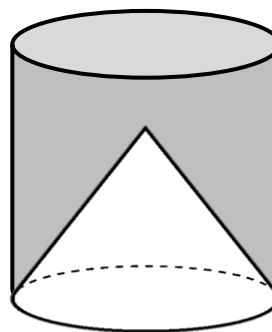
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή $a=4cm$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $180\pi cm^2$. Η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και του κώνου είναι $5 cm$. Αν το ύψος του κώνου είναι τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του κυλίνδρου, να βρείτε:

α) τον όγκο και

β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



3. Σε ξύλο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου βγάλαμε μια τρύπα σε σχήμα κυλίνδρου με διάμετρο βάσης $4cm$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το εμβαδόν της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι $72cm^2$, το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους του και το ύψος του είναι $5cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που προκύπτει ($\pi = 3,14$).

